2017 江苏高职单招院校单独招生联合测试真题试卷

数 学

一、 单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $P=\{-1,1\},Q=\{a,b\}$，若 $P=Q$，则 $a+b$ 的值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．2

2．函数 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为（　　）

A．1　　B．2　　C．π　　D．2π

3．如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1, AA_1=3$，则三棱柱 $ABO-A_1B_1O_1$ 的体积为（　　）

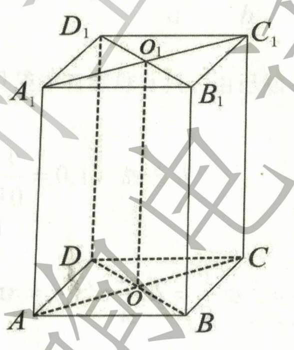
A．1　　B．3　　C．4　　D．12

4．已知向量 $\overrightarrow{AB}=2e_1-e_2,\overrightarrow{BC}=e_1+3e_2$，则用 e_1,e_2 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 为（　　）

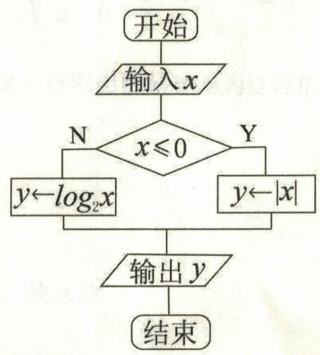
A．$3e_1+2e_2$　　B．e_1-4e_2　　C．$-e_1+4e_2$　　D．$-3e_1-2e_2$

5．如图是一个算法流程图，若输入 x 的值为 4，则输出 y 的值为（　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4



（第 3 题）



（第 5 题）

6．若变量 x,y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\leqslant 0\\ x-2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值为（　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．4

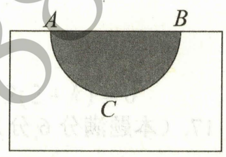
7．若 a,b 是正数，则 $\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a+b}{b}$ 的最小值为（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

8．袋中装有形状、大小都相同的红球和黄球共5只，从中随机取出1个球，该球是红球的概率为0.4，现从中一次随机取出2只球，则这2只球均为红球的概率为（　）

A．0.1　　B．0.2　　C．0.4　　D．0.8

9．右图阴影部分是某马戏团的演出场地示意图，该演出场地是借助公园内的墙体，用篷布围成的半圆形区域。若半圆弧 ACB 的长为 x（m），演出场地的面积为 y（m^2），则 x 与 y 之间的函数关系式为（　）



A．$y=\pi x^2$　　B．$y=\dfrac{\pi x^2}{2}$

C．$y=\dfrac{x^2}{\pi}$　　D．$y=\dfrac{x^2}{2\pi}$

10．在平面直角坐标系 xOy 中，圆 M 与直线 $l_1:2x+y-2=0$ 相切于点 $P(2,-2)$，且圆心 M 在直线 $l_2:x+2y=0$ 上，则圆 M 的半径为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　　D．$2\sqrt{5}$

二、填空题（本大题过5小题，每小题4分，共20分）

11．已知 $(1-2i)i=a+i$（i 为虚数单位），则实数 a 的值为______.

12．已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1),\boldsymbol{b}=(-1,x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值为______.

13．某省初中生体育测试标准中，“引体向上”是男生的选考科目之一．某校从初三（1）班抽出10名男生进行“引体向上”模拟测试，测试成绩统计如下表：

成绩（个）	2	6	7	10	12
人数	1	1	4	2	2

则这 10 名男生的“引体向上”的平均成绩为_____个.

14．数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n-13, S_n$ 是其前 n 项的和，则满足 $S_n<-35$ 的正整数 n 的值为______.

15．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}a\cdot 2^x+x, & x>0\\ 0, & x=0\\ b\cdot 2^{-x}+x, & x<0\end{cases}$，$g(x)=2^x+(a+b-1)\cdot 4^x+a$，若 $f(x)$ 为奇函数，且 $g(x)$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是__________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 40 分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.（本题满分 6 分）

在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 $a,b,c, A=\dfrac{\pi}{3}$.

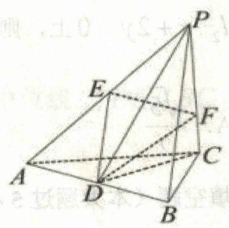
（1）若 $B=\dfrac{\pi}{4}, a=\sqrt{3}$，求 b；（2）若 $\cos B=\dfrac{13}{14}$，求 $\sin(A+B)$ 的值.

17.（本题满分 6 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC\perp$ 平面 ABC，点 D,E 分别是棱 AB,AP 的中点，F 是棱 CP 上异于 P 的一点，且 $DF\perp AB$.

求证：（1）PB // 平面 DEF；

（2）$AB\perp$ 平面 PCD.



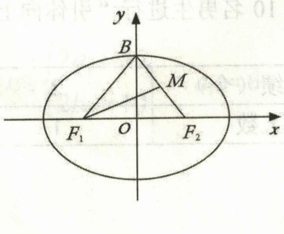
18.（本题满分 8 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{8-k}+\dfrac{y^2}{k-1}=1$ 的焦点在 x 轴上，F_1,F_2 分别在左、右焦点，B 为上顶点，M 为线段 BF_2 的中点.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）若 $k=3$，求椭圆离心率 e 的值；

（3）若 $MF_1\perp BF_2$，求实数 k 的值.



19．（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+1\ (a\in\mathbf{R})$，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$.

（1）若 $f'(1)=3$，求 a 的值；

（2）若 $a>0$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值（结果用 a 表示）；

（3）设 $g(x)=f'(x),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 是 $g(x)$ 的图象上不同的三点，若 $g(x)$ 的图象在点 C 处的切线与直线 AB 垂直，证明：$x_1x_3+x_2x_3$ 为定值.

20．（本题满分 10 分）

等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且各项均不为 0；等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1=1,b_4=8$.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $d=-2$，求 $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}+\ldots+a_{99}-a_{100}$ 的值；

（3）若 $a_1=d-1$，不等式 $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}<\dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}}$ 对任意正整数 n 都成立，求整数 d 的最小值.

江苏省2017年高职院校单独招生文化联合测试试卷

数学参考答案

1.C【解析】$\because P=Q,\therefore \begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\therefore a+b=0$，故选 C

2.D【解析】$T=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，故选 D

3.B【解析】$V=\dfrac{1}{4}V_{柱}=\dfrac{1}{4}\times 2^2\times 3=3$，故选 B

4.A【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2e_1-e_2)+(e_1+3e_2)=3e_1+2e_2$，故选 A

5.C【解析】$y=\log_2 4=2$，故选 C

6.B【解析】过点 $(0,-1)$ 时，z 取最小值 -1，故选 B

7.C【解析】$\because a,b\in \mathbf{R}^+\therefore \dfrac{4b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+1=5$，故选 C

8.A【解析】设袋中有红球 n 只，由已知 $\dfrac{n}{5}=0.4\Rightarrow n=2$，设取出两只球均为红球的概率为 P，则 $P=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}=0.1$，故选 A

9.D【解析】$\pi r=x,r=\dfrac{x}{\pi},S=\dfrac{1}{2}\pi r^2=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2=\dfrac{x^2}{2\pi}$，故选 D

10.A【解析】圆心 M 在过点 $(2,-2)$ 与 l_1 垂直的直线上，即 $y+2=\dfrac{1}{2}(x-2),x-2y-6=0$，联立 $\begin{cases}x+2y=0\\x-2y-6=0\end{cases}\Rightarrow M(3,-\dfrac{3}{2}),r=\sqrt{(3-2)^2+(-\dfrac{3}{2}+2)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故选 A

11.2【解析】$a=(1-2i)i-i=i+2-i=2$

12.$x=3$【解析】$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即 $3\times(-1)+x=0,x=3$

13.8【解析】$\overline{x}=\dfrac{2+6+7\times 4+10\times 2+12\times 2}{10}=8$

14.6【解析】$a_1=2\times 1-13=-11,S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-11n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-12n$，由 $n^2-12n<-35$ 得 $n^2-12n+35<0,5<n<7\therefore n=6$

15.0【解析】$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-1)+f(1)=0$ 即 $2a+1+2b-1=0\therefore a+b=0$，所以 $g(x)=2^x-4^x+a$，由 $g(x)=0$ 得 $a=4^x-2^x$，令 $2^x=t(t>0)$ 则 $a=t^2-t(t>0)$，又已知 $y=t^2-t(t>0)$ 与 $y=a$ 有两个不同的交点，$\therefore -\dfrac{1}{4}<a<0$，即 a 的取值范围是 $(-\dfrac{1}{4},0)$.

16.（本题满分 6 分）

解：（1）当 $B=\frac{\pi}{4}, a=\sqrt{3}$ 时，由正弦定理得 $b=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot a=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2}$.

（2）因为 B 是三角形的内角，所以 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

故 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

17.（本题满分 6 分）

证明：（1）因为点 D,E 分别是 AB,AP 的中点，所以 $DE\,//\,PB$，又 $DE\subset$ 平面 DEF，$PB\not\subset$ 平面 DEF，所以平面 $PB\,//$ 平面 DEF.

（2）因为 $PC\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $PC\perp AB$，又 $DF\perp AB, PC\subset$ 平面 PCD，$DF\subset$ 平面 $PCD, PC\bigcap DF=F$，所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

18.（本题满分 8 分）

解：（1）由已知得 $0<k-1<8-k$，解得 $1<k<\frac{9}{2}$ 故 k 的取值范围为 $(1,\frac{9}{2})$

（2）当 $k=3$ 时，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$，所以 $a^2=5,b^2=2$ 则 $c^2=a^2-b^2=3$，即

$a=\sqrt{5},c=\sqrt{3}\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

（3）因为 M 是 BF_2 的中点，又 $MF_1\perp BF_2$，所以 $BF_1=F_1F_2\Rightarrow a=2c$，所以 $a^2=4c^2$，即

$8-k=4[(8-k)-(k-1)]\Rightarrow k=4$.

19.（本题满分 10 分）

解：（1）因为 $f(x)=x^3-3ax+1\therefore f'(x)=3x^2-3a$. 因为 $f'(1)=3\therefore 3-3a=3,\therefore a=0$.

（2）因为 $f'(x)=3x^2-3a$. 令 $f'(x)=0,\Rightarrow x^2=a$，因为 $a>0\therefore x=-\sqrt{a}$（舍）或 $x=\sqrt{a}$.

当 $a\ge 1, x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)=2-3a$.

当 $0<a<1$ 时，$0<\sqrt{a}<1$，列表：

x	0	$(0,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},1)$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1-2a\sqrt{a}$	↗	$2-3a$

由表知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $1-2a\sqrt{a}$.即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $h(a)$，则

$$h(a)=\begin{cases}1-2a\sqrt{a}, & 0<a<1\\ 2-3a, & a\geqslant 1\end{cases}$$

（3）由题知 $g(x)=3x^2-3a,\therefore g'(x)=6x$，则 $g'(x_3)=6x_3$，即 $g(x)$ 的图象在点 C 处的切线斜率为 $6x_3$. $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{(3x_2{}^2-3a)-(3x_1{}^2-3a)}{x_2-x_1}=3(x_2+x_1)$，因为 $g(x)$ 的图象在点 C 处的切线与直线 AB 垂直，所以 $6x_3\cdot 3(x_2+x_1)=-1$，则 $x_3\cdot(x_2+x_1)=-\dfrac{1}{18}$，所以 $x_1x_3+x_2x_3$ 为定值 $-\dfrac{1}{18}$.

20.（本题满分 10 分）

解：（1）设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则由已知得 $q^3=8\Rightarrow q=2$，因为 $b_1=1\therefore b_n=2^{n-1}$.

（2）因为 $d=-2\therefore a_{2k-1}-a_{2k}=-d=2$，$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{99}-a_{100}=2\times 50=100$.

（3）因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $a_1=d-1$，$\therefore a_n=d-1+d(n-1)=dn-1$，

$\dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{2^{n+1}a_{n+1}-2^n a_{n+2}}{a_{n+2}\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2^n(2a_{n+1}-a_{n+2})}{a_{n+2}\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2^n a_n}{a_{n+2}\cdot a_{n+1}}$.当 $d\leqslant 0$ 时，则对任意正整数 $n, a_n<0$ 都成立，所以 $\dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}<0$ 都成立，与条件不符；当 $d>0$ 时，又 d 是整数，所以 $d\geqslant 1$，则当 $n\geq 2$ 时，$a_n>0$.要对任意正整数 n，$\dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}>0$ 都成立，只要 $a_1>0$ 即可，即 $d-1>0\therefore d>1$ 所以满足条件的整数 d 的最小值为 2.